<u>***Correction du-DST du 30-01-2017***</u>

<u>***Exercice 1***</u>***(6 points :4+2)*** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{P}$.

1) Déterminer la fonction f, sachant que :
- $\mathcal{P}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 3 , donc $f(3) = 0$
- $\mathcal{P}$ coupe l'axe des ordonnées au point B d'ordonnée 2 , donc $f(0) = 2$ et B(0 ;2)
- $\mathcal{P}$ admet pour tangente en B la droite d'équation $y = 2x + 2$, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. $f'(x) = 2ax + b$ et le coefficient directeur de la tangente en B vaut 2 donc $f'(0) = 2$

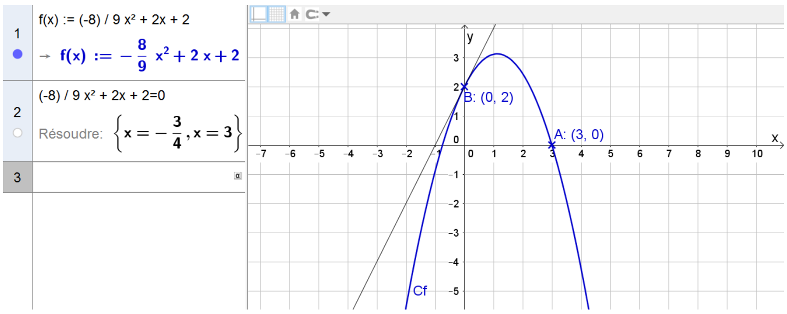
$f(3) = 0 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = 0$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow c = 2$

$f'(0) = 2 \Leftrightarrow b = 2$

$$\begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \\ 3\times 2 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 \\ 9a = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = -\frac{8}{9}} \\ \boldsymbol{b = 2} \\ \boldsymbol{c = 2} \end{cases}$$

***Donc on obtient*:** $\boldsymbol{f(x) = -\frac{8}{9}x^2 + 2x + 2}$



2) Indiquer l'abscisse du second point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses.

Pour trouver les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses, on doit résoudre $f(x) = 0$ *soit*

$-\frac{8}{9}x^2 + 2x + 2 = 0 \quad \Delta = 4 + \frac{64}{9} = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \quad x_1 = \frac{-2 + \frac{10}{3}}{-\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} \times \frac{9}{16} = -\frac{3}{4} \; ou \quad x_2 = \frac{-2 - \frac{10}{3}}{-\frac{16}{9}} = 3$

Donc le second point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses a pour coordonnées : $\boldsymbol{\left(-\frac{3}{4}; 0\right)}$

<u>***Exercice 2***</u>***(11 points :4+4+3)***

1) Déterminer les nombres a, b et c, pour que la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ait un minimum égal à $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ en $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ et qu'elle prenne la valeur 1 en 1. Faire alors le graphique C_f de la fonction f.

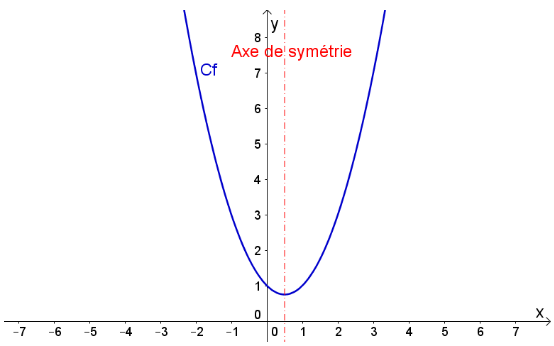
<u>Soit en utilisant la forme canonique comme au début de l'année</u> :

$f(x) = ax^2 + bx + c$ a un minimum égal à $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ en $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$ signifie que $f(x) = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ *avec* $a > 0$

Or $f(1) = 1$ *soit* $a \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ *donc* $a = 1 > 0$ $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

En développant : $\boldsymbol{f(x) = x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

Le coefficient vaut 1 donc la fonction est décroissante puis croissante et le sommet a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$.



3) Discuter, en fonction des valeurs de m, le nombre de points d'intersection de C_f et de la droite Δ ayant pour équation $y = mx$.

$$M(x;y) \in C_f \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ et \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ et \\ mx = x^2 - x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx \\ et \\ x^2 - (m+1)x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$Résolvons\ l'équation:\ x^2 - (m+1)x + 1 = 0 \quad \Delta = (m+1)^2 - 4 = (m+1+2)(m+1-2) = (m+3)(m-1)$$

- $\boldsymbol{m} \in]-\infty; \boldsymbol{-3}[\cup]\boldsymbol{1}; +\infty[$ $alors\ \Delta > 0\ \ l'équation\ a\ 2\ solutions\ x_1 = \frac{m+1+\sqrt{(m+3)(m-1)}}{2}\ \ y_1 = mx_1$ et $x_2 = \frac{m+1-\sqrt{(m+3)(m-1)}}{2}\ \ y_2 = mx_2$

  On a 2 points d'intersection de $\boldsymbol{C_f}$ et de la droite Δ : les points de coordonnées $(\boldsymbol{x_1}; \boldsymbol{y_1})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{x_2}; \boldsymbol{y_2})$
- $\boldsymbol{m = -3\ ou\ m = 1}$ $alors\ \Delta = 0\ l'équation\ a\ une\ unique\ solution$

On a 1 unique point d'intersection de $\boldsymbol{C_f}$ et de la droite Δ : le point de coordonnées $\left(\frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{2}}; \frac{\boldsymbol{m(m+1)}}{\boldsymbol{2}}\right)$

- $\boldsymbol{m} \in]-\boldsymbol{3}; \boldsymbol{1}[$ $alors\ \Delta < 0\ \ l'équation\ n'a\ pas\ de\ solution$

  On n'a aucun point d'intersection de $\boldsymbol{C_f}$ et de la droite Δ

4) Lorsque Δ coupe C_f en deux points M et M', on considère le milieu I de [MM']. Quel est l'ensemble décrit par I lorsque m varie ? Vous définirez la partie de la parabole décrite. (**Question difficile**)

$\boldsymbol{Pour\ m} \in]-\infty; \boldsymbol{-3}[\cup]\boldsymbol{1}; +\infty[$ On a 2 points d'intersection de C_f et de la droite Δ : les points $M(x_1; y_1)\ et\ M'(x_2; y_2)$

Le milieu I de [MM'] a pour coordonnées I: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ or $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{mx_1+mx_2}{2} = m\times\frac{x_1+x_2}{2}$

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{m+1+\sqrt{(m+3)(m-1)}}{2} + \frac{m+1-\sqrt{(m+3)(m-1)}}{2}}{2} = \frac{m+1}{2}$$

Le milieu I de [MM'] a pour coordonnées $\boldsymbol{I}$: $\left(\frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{2}}; \frac{\boldsymbol{m(m+1)}}{\boldsymbol{2}}\right)$

$$x_I{}^2 = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2+2m+1}{4} \quad et\ \ y_I = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{m^2+m}{2} = \frac{2m^2+2m}{4}$$

$$y_I - 2x_I{}^2 = \frac{2m^2+2m}{4} - \frac{2m^2+4m+2}{4} = \frac{-2m-2}{4} = -\frac{\boldsymbol{m+1}}{\boldsymbol{2}} = -x_I$$

$Donc\ y_I = 2x_I{}^2 - x_I\ donc\ le\ point\ I$ appartient à la parabole représentative de la $fonction\ g$

$\boldsymbol{g(x) = 2x^2 - x}$ quand $m\ parcourt] -\infty; -3[\cup]1; +\infty[\ x_I = \frac{m+1}{2}$ parcourt $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

Donc $\boldsymbol{le\ point\ I}$ parcourt la parabole représentative de la $\boldsymbol{fonction\ g}$:
$\boldsymbol{g(x) = 2x^2 - x}$ pour les abscisses $\boldsymbol{x} \in]-\infty; \boldsymbol{-1}[\cup]\boldsymbol{1}; +\infty[$

<u>Exercice 3</u>(12 points2+2+3+1+4) En 1798 Malthus publie "*An essay on the principle of population*". Il y émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira le monde à la famine. En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions et l'agriculture Anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Malthus supposa que la population augmentait d'environ 2% chaque année et que l'amélioration de l'agriculture permettait de nourrir 500 000 personnes de plus chaque année. Pour $\boldsymbol{n \geq 0}$, on note $\boldsymbol{P_n}$ la population de l'année $\boldsymbol{1800 + n}$ et on note $\boldsymbol{a_n}$ le nombre de personnes que l'agriculture permet de nourrir cette même année.

1) a) Exprimer P_n en fonction de n.

$P_0 = 8\,000\,000$ *et la population augmente de* 2% *chaque année donc* $P_{n+1} = 1{,}02 \times P_n$

Donc le suite (P_n) est géométrique de 1er terme $P_0 = 8\,000\,000$ et de raison $q = 1{,}02$

$\boldsymbol{P_n = 8\,000\,000 \times 1{,}02^n}$

b) D'après Malthus, quelle aurait été la population en 1900 ?

$1900 = 1800 + 100$ *donc* $n = 100$ *pour calculer la population en* 1900

$\boldsymbol{P_{100}} = 8\,000\,000 \times 1{,}02^{100} =$ **57 957 169 Habitants**

2) Combien l'agriculture aurait-elle pu nourrir de personnes en 1900 selon ses prévisions ?

$a_0 = 10\,000\,000$ *la population augmente de* $500\,000$ $a_{n+1} = a_n + 500\,000$

(a_n) *est donc une suite arithmétique de premier terme* $a_0 = 10\,000\,000$

et de raison $r = 500\,000$

Donc $a_n = 10\,000\,000 + n \times 500\,000$

$\boldsymbol{a_{100}} = 10\,000\,000 + 100 \times 500\,000 = \boldsymbol{60\,000\,000}$

3) On souhaite déterminer en quelle année la situation devrait devenir critique selon Malthus.
Pour cela :

a) Vous définirez une troisième suite *(e_n)* mesurant l'écart entre le nombre de personnes que l'agriculture permettrait de nourrir en 1800 + n et la population de l'année 1800 + n.

$e_n = a_n - P_n = 10\,000\,000 + n \times 500\,000 - 8\,000\,000 \times 1{,}02^n$, $n \in \mathbb{N}$

b) Vous **<u>écrirez sur votre copie</u>** un programme pour la calculatrice qui permet de répondre à la question et vous donnerez la réponse fournie par votre calculatrice avec votre programme.

N prend la valeur 0

Tant Que $(10\,000\,000 + n \times 500\,000 - 8\,000\,000 \times 1{,}02^n \geq 0)$

N prend la valeur N+1

Fin de Tant Que

P prend la valeur 1800+N

Afficher « En l'année », P, « l'agriculture ne peut plus nourrir la population. »

Et le programme TI 83+…

Exercice 4 : *(11 points :2+3+4+2)* Résoudre dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1) $2sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ $\quad sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ $\quad \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\begin{cases}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}}\\ \boldsymbol{ou}\\ \boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}+k\pi}\end{cases}$$

On ne garde que les solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k=-1$, la solution $x=-\frac{3\pi}{4}$ appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k=0$, les solutions $x=-\frac{\pi}{12}$ *et* $x=\frac{\pi}{4}$ appartiennent à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k=1$, $x=\frac{11\pi}{12}$ appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k\geq 2$, les 2 solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

En résumé : $\boldsymbol{S}=\left\{-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{4};\frac{11\pi}{12}\right\}$

2) $\cos(2x)=-cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Or $cos\left(x+\frac{\pi}{4}+\pi\right)=-cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ l'équation devient $\cos(2x)=cos\left(x+\frac{\pi}{4}+\pi\right)$

$\cos(2x)=cos\left(x+\frac{\pi}{4}+\pi\right)$

$$\begin{cases}2x=x+\frac{\pi}{4}+\pi+2k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 2x=-x-\frac{\pi}{4}-\pi+2k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ 3x=-\frac{5\pi}{4}+2k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\text{ , }k\in\mathbb{Z}\\ ou\\ x=-\frac{5\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\text{ , }k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$k=-2,\begin{cases}x=\frac{5\pi}{4}-4\pi\notin]-\pi;\pi]\\ ou\\ x=-\frac{5\pi}{12}-\frac{4\pi}{3}\notin]-\pi;\pi]\end{cases}\qquad k=-1\begin{cases}\boldsymbol{x=-\frac{3\pi}{4}}\in]-\pi;\pi]\\ ou\\ x=-\frac{13\pi}{12}\notin]-\pi;\pi]\end{cases}$$

$$k=0,\begin{cases}x=\frac{5\pi}{4}\notin]-\pi;\pi]\\ ou\\ \boldsymbol{x=-\frac{5\pi}{12}}\in]-\pi;\pi]\end{cases}\qquad k=1,\begin{cases}\\ x=-\frac{5\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]\end{cases}$$

$$k=2,\begin{cases}\\ x=-\frac{5\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}=\frac{11\pi}{12}\in]-\pi;\pi]\end{cases}$$

Pour $k\geq 3$, les 2 solutions ont toutes en dehors de l'intervalle $]-\pi;\pi]$

En résumé : $\boldsymbol{S}=\left\{-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{5\pi}{12};\frac{\pi}{4};\ \frac{11\pi}{12}\right\}$

3) $cos^2x - cosx = 0$

$cosx(cosx-1)=0 \Leftrightarrow cos(x)=0 \;\; ou\; co\,s(x)=1 \Leftrightarrow$

$cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \;\; ou\; cos(x)=\cos(0)$

Résolvons les 2 équations trigonométriques :

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x=0+2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x=-0+2k\pi\,, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\;\;, k\in\mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,, k\in\mathbb{Z}\end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} x=2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \\ \end{cases}$$

On ne garde que les **solutions appartenant à l'intervalle** $]-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$

Si $k\leq -1$, les solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k=0$, les solutions $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{2}\; et\; x=-\frac{\pi}{2}\;\; et\; x=0}$ **appartiennent à** $]-\boldsymbol{\pi};\boldsymbol{\pi}]$

Si $k\geq 1$, les solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

En regroupant les solutions :

$$\boldsymbol{S=\left\{-\frac{\pi}{2}\,;0\,;\frac{\pi}{2}\;\right\}}$$

4) $sin3x=0$

$sin(3x)=\sin(0)$

$$\begin{cases} 3x=2k\pi\,, k\in\mathbb{Z} \\ \quad ou \\ 3x=\pi+2k\pi\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{2k\pi}{3}\,, k\in\mathbb{Z} \\ \quad ou \\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{cases}$$

On ne garde que les solutions appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k\leq -2$, les 2 solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k=-1$, les solutions $x=-\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}\; et\; x=-\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ appartiennent à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k=0$, les solutions $x=\boldsymbol{0}\; et\; x=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$ appartiennent à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k=1$, $x=\boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}\;\; ou\; x=\boldsymbol{\pi}$ appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

Si $k\geq 2$, les 2 solutions n'appartiennent pas à l'intervalle $]-\pi;\pi]$

En résumé : $\boldsymbol{S=\left\{-\frac{2\pi}{3};-\frac{\pi}{3};0;\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\pi\right\}}$

Exercice 5 : *(8 points3+1+2+2)*

On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $\boldsymbol{u_0 = 5}$ **et** $\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{6u_n + 4}{u_n+9}}$

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\boldsymbol{v_n = \frac{u_n + 4}{u_n - 1}}$

1) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 4}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{6u_n + 4}{u_n + 9} + 4}{\frac{6u_n + 4}{u_n + 9} - 1} = \frac{\frac{6u_n + 4 + 4u_n + 36}{u_n + 9}}{\frac{6u_n + 4 - u_n - 9}{u_n + 9}} = \frac{\frac{10u_n + 40}{u_n + 9}}{\frac{5u_n - 5}{u_n + 9}} = \frac{10(u_n + 4)}{5(u_n - 1)}$$

$$v_{n+1} = 2\times\frac{u_n + 4}{u_n - 1} = 2v_n$$

$v_{n+1} = 2v_n$ et $v_0 = \frac{u_0 + 4}{u_0 - 1} = \frac{9}{4}$ **Donc la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et 2 premier terme $\frac{9}{4}$**

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et 2 premier terme $\frac{9}{4}$

$$\boldsymbol{v_n = \frac{9}{4}\times 2^n}$$

3) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

$v_n = \frac{u_n + 4}{u_n - 1}$ *donc* $v_n(u_n - 1) = u_n + 4$ $\quad v_nu_n - v_n = u_n + 4$

$v_nu_n - u_n = v_n + 4 \quad u_n(v_n - 1) = v_n + 4 \quad \boldsymbol{u_n = \frac{v_n + 4}{v_n - 1}}$

$$u_n = \frac{v_n + 4}{v_n - 1} = \frac{\frac{9}{4}\times 2^n + 4}{\frac{9}{4}\times 2^n - 1} = \boldsymbol{\frac{9\times 2^n + 16}{9\times 2^n - 4}}$$

4) Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n = \frac{6u_n + 4}{u_n + 9} - u_n = \frac{6u_n + 4 - u_n^2 - 9u_n}{u_n + 9} = \frac{u_n^2 - 3u_n + 4}{u_n + 9}$ *le trinôme en* u_n

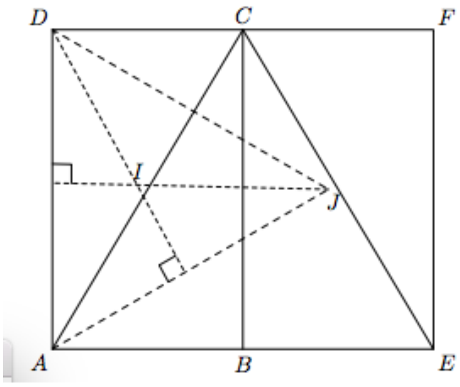
a pour discriminant $\Delta = 9 - 16 < 0$ *donc* $u_n^2 - 3u_n + 4 > 0$ *pour tout* u_n

Donc le numérateur est positif, intéressons nous au signe du dénominateur.

$u_n = \frac{9\times 2^n + 16}{9\times 2^n - 4} > 0$ *car* $\forall n \in \mathbb{N}$ $9\times 2^n + 16 > 0$ *et* $9\times 2^n - 4 > 0$ *donc* $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n + 9 > 0$

Donc le quotient de 2 nombres positifs est positif donc $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} > 0$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.



<u>Exercice 6</u> : *(12 points :1+1+1+3+1+2+3)*

On considère un triangle équilatéral AEC inscrit dans le rectangle AEFD. A l'intérieur du rectangle, on trace le triangle équilatéral DAJ ; on note I sont centre. Attention, la figure ci-dessous n'a pas été tracée correctement ; le but de l'exercice est de montrer que les points I et J appartiennent respectivement aux segments [AC] et [CE].

1. Démontrer la propriété suivante :
   $Si\ (\vec{u}\,;\,\vec{v}\,) = (\vec{u}\,;\,\vec{w}\,)$ alors $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens.

$(\vec{u}\,;\,\vec{w}\,) = (\vec{u}\,;\,\vec{v}\,) + (\vec{v}\,;\,\vec{w}\,) or\ (\vec{u}\,;\,\vec{v}\,) = (\vec{u}\,;\,\vec{w}\,)\ donc\ (\vec{v}\,;\,\vec{w}\,) = 0$
donc $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et de même sens

2. a. Justifier que $(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{6}$.

$\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AE}\right) = -\frac{\pi}{3}$ *car le triangle AEC est équilatéral et l'angle négatif*

$\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$

b. Justifier que l'angle au centre $\left(\overrightarrow{ID}\,;\,\overrightarrow{IA}\right)$ mesure $\frac{2\pi}{3}$.

I est le centre du triangle équilatéral DAJ donc les 3 angles entre les médiatrices et médianes qui sont concourantes en I sont égaux : $\left(\overrightarrow{ID}\,;\,\overrightarrow{IA}\right) = \left(\overrightarrow{IA}\,;\,\overrightarrow{IJ}\right) = \left(\overrightarrow{IJ}\,;\,\overrightarrow{ID}\right)$ or la somme de ces 3 angles vaut 2π

Donc $3\left(\overrightarrow{ID}\,;\,\overrightarrow{IA}\right) = 2\pi\ \ soit\ \ \left(\overrightarrow{\boldsymbol{ID}}\,;\,\overrightarrow{\boldsymbol{IA}}\right) = \frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{3}}$

c. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\,,\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right) = \left(\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AI}\right) + \left(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{ID}\right) + \left(\overrightarrow{ID}\,,\overrightarrow{AD}\right)$

Le triangle DAJ est équilatéral donc les 3 hauteurs ont la même longueur et $IA = ID = \frac{2}{3} \times hauteur$

Le triangle IDA est isocèle en I donc $\left(\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DI}\right) = \left(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AD}\right)$ *or dans le triangle DAI*:

$\left(\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DI}\right) + \left(\overrightarrow{AI}\,,\overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{ID}\,;\,\overrightarrow{IA}\right) = \pi\ \ donc\ \left(\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DI}\right) = \frac{\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\pi}{6}$ donc

$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{ID}}\,,\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right) = \left(\overrightarrow{DI}\,,\overrightarrow{DA}\right) = -\left(\overrightarrow{DA}\,,\overrightarrow{DI}\right) = -\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}$ et on a déjà vu précédemment

$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AI}}\,,\overrightarrow{\boldsymbol{ID}}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{ID}\,,\overrightarrow{AI}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{ID}\,;\,\overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}\,;\,\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}\right) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}}$

En remplaçant les 3 valeurs, on obtient :

$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{6}} = \left(\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AI}\right) + \frac{\pi}{3} + -\frac{\pi}{6}$ donc $\left(\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AI}\right) = 0$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AI}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (de même sens) **et donc A, I et C sont alignés**

3. a. Justifier que le triangle DCJ est isocèle en C.

A, I et C sont alignés Donc (IC) est la médiatrice de [DJ] donc *donc* $DC = CJ$ *donc*
DCJ est isocèle en C.

b. En déduire la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CJ})$.

DCJ est isocèle en C donc $\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CJ}\right) = \left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)$

Or dans le triangle ADC rectangle en D, on a déjà démontré que $\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{6}$ donc

$\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

$$\boldsymbol{Donc\ \left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CJ}\right) = \left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right) = \frac{\pi}{3}}$$

c. En déduire que les points J, E, C sont alignés.

$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{CJ}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CE}}\right) = \left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CE}\right)$

$\left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CA}\right) = -\left(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CJ}\right) = -\frac{\pi}{3}$

$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AE}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{2\pi}{3}$ *car le triangle ACE est équilatéral*: $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$

$\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CE}\right) = \left(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}\right) = -\frac{\pi}{3}$ En utilisant les 3 résultats :

$\left(\overrightarrow{\boldsymbol{CJ}}, \overrightarrow{\boldsymbol{CE}}\right) = \left(\overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AE}\right) + \left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{CE}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \mathbf{0}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ *et* $\overrightarrow{CE}$ sont colinéaires (de même sens) **et donc <u>C, J et E sont alignés</u>**

<u>Bonus :</u> *(4 points :2+2)*

1) Deux nombres ont une somme S. Quelle est la valeur maximale de leur produit ?
2) Deux nombres positifs ont pour produit P, quelle est la valeur minimale de leur somme ?